القسم : رياضيات السنة : الرابعة / جبر المادة : شبكات المحاضرة : الأولى

المجموعات المرتبة

نقول عن العلاقة الثنائية R المعرفة في المجموعة غير الخالية E أنها علاقة ترتيب في E إذا وفقط إذا حققت الشروط :

① انعكاسية $\forall x \in E : xRx$

② تخالفية xRy & $yRx \Rightarrow x = y$

③ متعدية $\forall x, y, z \in E : xRy$ & $yRz \Rightarrow xRz$

بشكل عام فإننا سنكتب علاقة الترتيب $x \leq y$ بدلاً من xRy ، وفي حال وجود التباس نكتب $x \leq_E y$ أي $y \geq x$ بدلاً من xRy إذا كان يوجد أكثر من علاقة ترتيب واحدة .

إن المجموعة E المزودة بعلاقة ترتيب $\leq$ تسمى مجموعة مرتبة

أمثلة :

① مجموعة الأعداد الطبيعية N المزودة بعلاقة الترتيب المألوفة $\leq$ هي مجموعة مرتبة

② مجموعة الأعداد الطبيعية N^* (عدا الصفر) المزودة بعلاقة القسمة $(x|y)$ أي x يقسم y المعرفة كما يلي :

هي أيضاً مجموعة مرتبة $x|y \iff \exists a \in N^* ; y = ax$

③ مجموعة أجزاء المجموعة E التي نرمز لها بالرمز $P(E)$ المزودة بعلاقة الاحتواء $x \subseteq y$ (حيث E مجموعة) هي أيضاً مجموعة مرتبة

سوف نستخدم الرموز التالية :

$x \nleq y$: x ليست أصغر من y

$x < y$: x أصغر تماماً من y أي أن $x \leq y$ & $x \neq y$

نقول عن العنصرين x, y أنهما متقارنين إذا كان

$x \leq y$ & $y \leq x$

وإذا كان غير ذلك فإننا نقول أن x, y غير متقارنين

نقول عن علاقة الترتيب أنها ترتيب كلي إذا كان كل عنصرين متقارنين ، ونسمي عندئذ هذه المجموعة بالمجموعة المرتبة كلياً أو سلسلة

أمثلة :

① N مع علاقة الترتيب العادية هي سلسلة (ترتيب كلي) ؛

② $\mathbb{N}^*$ مع علاقة يقسم ليست سلسلة

③ $P(E)$ مع علاقة الاحتواء ليست سلسلة

ملاحظة :

في حالة السلسلة إذا كان $y \not\leq x$ فإن $x \leq y$

الترتيب العكسي.

لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة فيمكن عندئذ تعريف علاقة جديدة في E نكتب: $y \geq x$ والتي تكافئ : $x \leq y$ ويمكن التحقق بسهولة أنها علاقة ترتيب في E ندعو العلاقة $y \geq x$ بعلاقة الترتيب العكسية للعلاقة $x \leq y$

الترتيب المولد (أو مقصور علاقة الترتيب)

لتكن $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة و A مجموعة جزئية من E فإن أثر علاقة الترتيب $\leq$ على $A \times A$ هي علاقة ترتيب على A نرمز لها بالرمز $\leq_A$ والمعرفة بالشكل : $x \leq_A y$ إذا كان $x \leq y$ ؛ $x, y \in A$ تسمى هذه العلاقة علاقة الترتيب المولدة بـ $\leq$ على A

مثال :

لتكن المجموعة المرتبة $(\mathbb{N}^*, |)$ ولتكن $A=\{1, 2, 8, 4\}$

نلاحظ أن A هي سلسلة من أجل الترتيب المولد رغم أن الترتيب في $\mathbb{N}^*$ ليست كلية أي أن $\mathbb{N}^*$ ليست سلسلة

ترتيب الجداء :

لتكن $\{(E_i, \leq_i)\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات المرتبة عندئذ نعرف في مجموعة الجداء $E = \prod_{i \in I} E_i$

العلاقة : $(x_i) \leq (y_i)$ كما يلي : $x_i \leq_i y_i$ من أجل أي $i \in I$

ويمكن البرهان بسهولة أن $\leq$ هي علاقة ترتيب في $E = \prod_i E_i$ ندعوها علاقة ترتيب الجداء

* حالة خاصة

لتكن $\mathcal{F}(E,F)$ مجموعة التطبيقات من E في F فيمكن مطابقتها مع المجموعة F^E أي مع $\prod_{x\in E} F_x$ وحيث $F_x = F$ أي أنه يمكن مطابقة كل تطبيق $f: E \to F$

مع $(f(x))_{x\in E}$ فإذا كانت F مجموعة مرتبة عندئذ نعرف علاقة ترتيب الجداء على المجموعة $\mathcal{F}(E,F)$ بالشكل التالي: $f \leq g$ إذا وفقط إذا كان $f(x) \leq g(x)$; $\forall x \in E$

التوضيح:

إذا كانت $F=\{1,2\}$ و $E=\{a,b\}$ عندئذ يكون $F^E = \mathcal{F}(E,F)$

ويكون:

$F^E = F\times F = F^2$ حيث أن

$F^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$f_1 \leq f_2$ إذا تحقق

$f_1(x) \leq f_2(x) \iff \begin{cases} f_1(a) \leq f_2(a) \\ f_1(b) \leq f_2(b) \end{cases}$

$\forall x \in E$

ملاحظة:

إن جداء سلاسل ليس بالضرورة سلسلة

مثال:

في جداء السلسلة $(\mathbb{N},\leq)$ يكون الزوجين $(1,6)$ و $(2,5)$ غير متقارنين أي أن $(\mathbb{N}^2,\leq)$ ليست سلسلة

مورفيزمات المجموعات المرتبة :

لتكن $(E,\leq)$ و $(F,\leq)$ مجموعتان جزئيتان مرتبتان ، $f: E \to F$ تطبيق من E إلى F

فإننا نقول عن f بأنه مورفيزم ترتيب أو تطبيق متزايد إذا كان :

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

كما نعرف التطبيق المتزايد تماماً : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

والتطبيق المتناقص : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

والتطبيق المتناقص تماماً : $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

ملاحظات :

1) التطبيق الثابت يكون بنفس الوقت متزايد ومتناقص ولكن العكس غير صحيح بالضرورة

مثال :

لتكن المجموعة $E = \{2,3,4,6\}$ مرتبة بعلاقة يقسم و $F = N$ مع علاقة الترتيب العادي . لنعرف f كما يلي :

$f(2) = f(4) = 1$ و $f(3) = f(6) = 2$ فإن f يكون متزايد ومتناقص بنفس الوقت ولكنه ليس ثابت

E F f

$2 \leq 4 \Rightarrow f(2) \leq f(4)$ ، $1 \leq 1$ (2 ترتبط بـ 4)

$3 \leq 6 \Rightarrow f(3) \leq f(6)$ ، $2 \leq 2$ (3 ترتبط بـ 6)

متناقص لأن $f(2) \geq f(4)$ و $f(3) \geq f(6)$

2) كل تطبيق متزايد ومتباين يكون متزايد تماماً ولكن بالضرورة أن كل تطبيق متزايد تماماً [illegible] متبايناً

مثال : لنأخذ نفس المجموعات في المثال السابق بحيث أن :

$$f(6) = 3 \quad , \quad f(2) = 1 \quad , \quad f(3) = f(4) = 2$$

نلاحظ أن f متزايد تماماً ولكنه ليس متبايناً

3) إذا كانت f تقابلاً متزايداً فإن التطبيق العكسي له أي f^{-1} لا يكون بالضرورة متزايداً

مثال:

إذا كانت $E = \{2, 3, 9\}$ والعلاقة المعرفة عليها هي علاقة يقسم $R = |$

و $F = \{2, 4, 8\}$ والعلاقة المعرفة عليها هي علاقة يقسم $R' = |$

والتطبيق يعرف بالشكل:

$f(2) = 2 \qquad f(3) = 4 \qquad f(9) = 8$

نلاحظ أن f متزايد وتقابل ولكن تطبيقه العكسي:

$f^{-1}(2) = 2 \qquad f^{-1}(4) = 3 \qquad f^{-1}(8) = 9$

أي

$f^{-1} : F \longrightarrow E$ ليس متزايداً لأن

$2 \leq 4 \Rightarrow \underset{2}{f^{-1}(2)} \nmid \underset{3}{f^{-1}(4)}$

مثال آخر:

التطبيق الخاص من $(N^*, |)$ إلى $(N^*, \leq)$ هو تقابل متزايد ولكن تطبيقه العكسي ليس متزايد